Komplexní Doučování pro Vysoké Školy

Matematická analýza - 4MM101 a 4MM106

Příklad 1 *Vypočtěte limitu posloupnosti*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+3}{5n^3+n}$$

Řešení 1.
Pokud se budeme zabývat limitami, prvním krokem k úspěšnému výsledku je správné dosazení a určení typu limitu. Můžeme získat pouze dva typy: určitý výraz, který je již přímým výsledkem limity a nemusíme limitu dále řešit, nebo získáme neurčitý výraz, který je třeba dále upravit, abychom získali výraz určitý. V prvním kroku tedy nahradíme každé n v argumentu limity nekonečnem, tj:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+3}{5n^3+n} = \frac{\infty^2+\infty+3}{5\infty^3+\infty} = \frac{\infty}{\infty} \tag{1}$$

Po dosazení jsme dostali limitní výraz $\frac{\infty}{\infty}$. Při výpočtech jsme využili základní charakteristiky práce z nekonečnama jako:

- Součet libovolného kladného nekonečna s jiným kladným nekonečnem je vždy nekonečno.
- Kladné nekonečno umocněno na libovolnou mocninou je vždy kladné nekonečno.
- Součet nebo rozdíl libovolného nekonečna s jiným číslem než nula je vždy nekonečno až na znaménko nekonečna.
- Každé číslo dělené nekonečnem je nula.
- Záporné nekonečno na sudou celou mocninu je vždy kladné nekonečno.
- záporné nekonečno na lichou celou mocninu je vždy záporné nekonečno.
- Každá kladná odmocnina z nekonečna je nekonečno.

Protože nám vyšel neurčitý limitní výraz, použijeme v tomto případě vynímání, protože pokud limitní argument obsahuje pouze n na kladnou celou mocninu pod a nad zlomkovou čarou, pak víme, že by nám vynímání mělo téměř jistě pomoci. Vyjměme vždy nejvyšší mocninu z čitatele a nejvyšší mocninu z jmenovatele, tedy:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+3}{5n^3+n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^{\cancel{3}1}\left(5+\frac{1}{n^2}\right)} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n\left(5+\frac{1}{n^2}\right)}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Jakmile provedeme jednu úpravu limity, vždy zkontrolujeme, zda se neurčitý výraz změnil na určitý, tedy:

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n\left(5+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}}{\infty\left(5+\frac{1}{\infty^2}\right)} = \frac{1+0+0}{\infty(5+0)} = \frac{1}{\infty} = 0 \tag{3}
$$

kde jsme právě použili výše napsané charakteristiky.

Odpověď: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+3}{5n^3+n} = 0$ $\square$

Příklad 2 *Vypočtěte derivaci funkce dané předpisem*

$$f(x) = e^x(x^3 - x^2 + 6)$$

Řešení 2.
V tomto případě musíme nejprve vyřešit znaménko součinu, takže použijeme vzorec pro derivaci součinu, tedy:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (e^x[x^3 - x^2 + 6])' = \\
&= (e^x)'[x^3 - x^2 + 6] + e^x([x^3 - x^2 + 6])' = \\
&= e^x(x^3 - x^2 + 6) + e^x[(x^3)' - (x^2)' + (6)'] = \\
&= e^x(x^3 - x^2 + 6) + e^x(3x^2 - 2x + 0) = \\
&= e^x(x^3 - x^2 + 6) + e^x(3x^2 - 2x)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Na první člen jsme pak aplikovali derivaci exponenciály a na druhý člen v závorce jsme museli opět aplikovat pravidlo pro derivaci součtu funkcí a poté pravidlo pro derivaci mocniny.

Odpověď: $f'(x) = (e^x[x^3 - x^2 + 6])' = e^x(x^3 - x^2 + 6) + e^x(3x^2 - 2x)$ $\square$

Příklad 3 *Určete maximum a minimum funkce f na uzavřeném intervalu J:*

$$f(x) = xln(x), \quad J = \langle e^{-2}; e\rangle$$

Řešení 3.
Pokud máme určit maximum a minimum na uzavřeném intervalu J, pak víme, že tento typ příkladu vždy vyřešíme pomocí Weierstrassovy věty, která zajišťuje, že

na uzavřeném intervalu má spojitá funkce maximum a minimum, takže je stačí najít. Nejprve musíme určit podezřelé body z maxim a minim na celém definičním intervalu, takže vždy musíme řešit rovnici:

$$f'(x) = 0 \tag{5}$$

Rovnice (5) představuje tzv. nutné podmínky pro existenci extrému funkce jedné proměnné, takže řešení je:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (xln(x))' \\ &= x'ln(x) + xln'(x) \\ &= ln(x) + \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} \\ &= ln(x) + 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Nejprve jsme museli vypočítat první derivaci, na kterou jsme použili pouze derivaci součinu a poté vzorce základních derivací. Ve druhém kroku musíme za výsledek (6) dosadit nulu tedy:

$$\begin{aligned} ln(x) + 1 &= 0 \qquad | - 1 \\ ln(x) &= -1 \\ x &= e^{-1} \end{aligned} \tag{7}$$

Řešení (5) je tedy jediný podezřelý bod z extrému funkce, tedy e^{-1}. Musíme ověřit, zda tento bod patří do daného intervalu J, což vidíme, že ano, takže s ním budeme dále počítat. V posledním kroku potřebujeme spočítat pouze funkční hodnoty všech podezřelých bodů, tj. bodů, které jsou řešením rovnice (5) a vždy také hraničí body intervalu J, tedy:

$$\begin{aligned} f(e^{-2}) &= e^{-2}ln(e^{-2}) = e^{-2} \cdot (-2) = -\frac{2}{e^2} \\ f(e^{-1}) &= e^{-1}ln(e^{-1}) = e^{-1} \cdot (-1) = -\frac{1}{e} \\ f(e) &= eln(e) = e \cdot 1 = e \end{aligned} \tag{8}$$

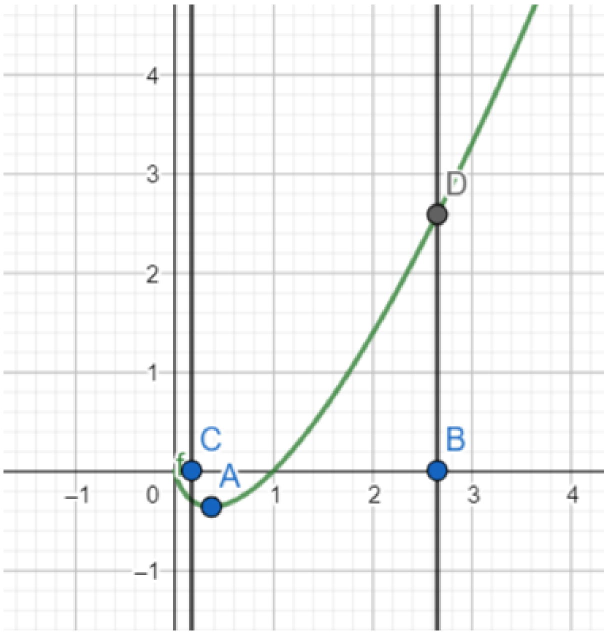
Z výpočtu funkčních hodnot (8) stačí vybrat největší funkční hodnotu, která bude maximem, a nejmenší funkční hodnotu, která bude minimem. Vidíme, že nejmenší funkční hodnota je $-\frac{1}{e}$, a tedy minimum je v $\frac{1}{e}$, a největší funkční hodnota je e, a tedy maximum je v e.

Pokud bychom danou funkci vynesli do grafu, pak by byl interval J vymezen body B a C. Vidíme, že řešením rovnice (5) je bod A, který leží v intervalu J, proto jsme jej zahrnuli do výpočtu. Vypočtené funkční hodnoty nám nyní jasně říkají, že maximum je v bodě D a minimum v bodě A.

Odpověď:

- Maximum funkce je v bode $x = e$
- Minimum funkce je v bode $x = e^{-1}$ □

Příklad 4 *Najděte vázané extrémy funkce dvou proměnných f dané předpisem:*



Obr. 1: Grafické řešení

$$ln(x^2 + y^2)$$
$$\textit{při vazební podmínce}$$
$$9x^2 + y^2 = 9$$

Řešení 4.
Tento typ příkladu poznáme podle toho, že máme funkci dvou proměnných a ani x, ani y nelze vyjádřit z vazební podmínky, jinými slovy jsou vždy ve druhé mocnině. V tomto případě postupujeme tak, že vypočítáme první parciální derivace dané funkce, tedy:

$$\begin{aligned}
\partial_x(ln(x^2 + y^2)) &= \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \partial_x(x^2 + y^2) \\
&= \frac{1}{x^2 + y^2} 2x = \frac{2x}{x^2 + y^2} \\
\partial_y(ln(x^2 + y^2)) &= \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \partial_y(x^2 + y^2) \\
&= \frac{1}{x^2 + y^2} 2y = \frac{2y}{x^2 + y^2}
\end{aligned} \tag{9}$$

Ve druhém kroku přepíšeme vazební podmínku na vazební funkci $g(x; y) = 9x^2 + y^2 - 9$ a opět spočítáme první parciální derivace, tedy:

$$\begin{aligned}
\partial_x(9x^2 + y^2 - 9) &= \partial_x(9x^2) + \partial_x(y^2) - \partial_x(9) = 9 \cdot 2x + 0 - 0 = 18x \\
\partial_y(9x^2 + y^2 - 9) &= \partial_y(9x^2) + \partial_y(y^2) - \partial_x(9) = 0 + 2y - 0 = 2y
\end{aligned} \tag{10}$$

Ve třetím kroku musíme sestrojit tzv. Jacobiho determinant[1], který má předpis:

$$j(x; y) = \begin{vmatrix} \partial_x f(x; y) & \partial_y f(x; y) \\ \partial_x g(x; y) & \partial_y g(x; y) \end{vmatrix} \tag{11}$$

[1]Je to determinant prvních parciálních derivací, pomocí kterého určujeme podezřelé body s maxima resp. minima.

Do výrazu (11) dosadíme naše spočítané derivace (10) a (9), tedy:

$$
\begin{aligned}
j(x;y) = \begin{vmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \\ 18x & 2y \end{vmatrix} &= \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot 2y - \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot 18x = \\
= \frac{4xy}{x^2+y^2} - \frac{36xy}{x^2+y^2} &= -\frac{32xy}{x^2+y^2}
\end{aligned} \tag{12}
$$

V dalším kroku musíme vypočítat soustavu rovnic danou:

$$
\begin{aligned}
j(x;y) &= 0 \\
g(x;y) &= 0
\end{aligned} \tag{13}
$$

Po dosazení dostaneme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
-\frac{32xy}{x^2+y^2} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad -32xy = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \vee y = 0 \\
9x^2 + y^2 - 9 = 0 \\
x = 0 \quad &\Longrightarrow \quad y^2 - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{1;2} = \pm 3 \\
y = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 9x^2 - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1;2} = \pm 1
\end{aligned} \tag{14}
$$

Vidíme, že řešením soustavy rovnic vzniklo několik spojených kořenů. Proto v dalším kroku určíme všechny možné varianty řešení, tj. podezřelé body z maxima, resp. minima:

$$
\begin{aligned}
A &= [0; -3] \\
B &= [0; 3] \\
C &= [-1; 0] \\
D &= [1; 0]
\end{aligned} \tag{15}
$$

Jakmile určíme podezřelé body z extrémů, je příklad téměř kompletní, protože máme zadání, které obsahuje jak x, tak y ve druhé mocnině a symbol rovná se, z čehož vyplývá, že takto zadaná vazební podmínka je kompaktní množina, přesně elipsa. Kdykoli je vazební podmínka dána jako kompaktní množina, pak příklad řešíme pomocí zobecněné Weirsstrasovy věty, která říká, že je-li funkce více proměnných spojitá na neprázdné kompaktní množině, pak na této množině nutně musí mít maximum i minimum. Funkce je spojitá a množina je neprázdná a kompaktní. Pak stačí spočítat funkční hodnoty v podezřelých bodech (15) a vybrat největší, resp. nejmenší:

$$
\begin{aligned}
A = [0; -3] \quad &\Longrightarrow \quad ln(0^2 + (-3)^2) = ln9 \\
B = [0; 3] \quad &\Longrightarrow \quad ln(0^2 + (3)^2) = ln9 \\
C = [-1; 0] \quad &\Longrightarrow \quad ln((-1)^2 + (0)^2) = ln1 \\
D = [1; 0] \quad &\Longrightarrow \quad ln(1^2 + (0)^2) = ln1
\end{aligned} \tag{16}
$$

Vidíme, že nejnižší hodnota je zastoupena 2 krát u C a D, takže funkce má 2 vázané minima a největší hodnota je zastoupena také 2 krát u A a B, takže funkce má 2 vázané maxima.

Odpověď: Funkce má lokální vázané minimum v bode $C = [-1; 0]$ a $D = [1; 0]$ a funkce má lokální vázané maximum v bode $A = [0; -3]$ a $B = [0; 3]$. □

...